Zahldarstellung mit negativen Ziffern

In Dezimalschreibweise ist der Wert einer n-stelligen Zahl $\underline{d_{n-1}\ldots d_3d_2d_1d_0}$ gegeben durch den Term $d_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\ldots+d_3\cdot 10^3+d_2\cdot 10^2+d_1\cdot 10+d_0\cdot 1$, wobei die Ziffern d_i einstellige, *nicht-negative* ganze Zahlen (0,1,2,...,9) sind. So ist z.B.

$$4703 = 4\cdot 10^3+7\cdot 10^2+0\cdot 10+3\cdot 1.$$

Nun ist aber der obige Term genauso gut berechenbar, wenn man für die d_i auch *negative* Werte (-9,-8,...,-1,0,1,...,9) zulässt. So hat

$$5\cdot 10^3-3\cdot 10^2+0\cdot 10+3\cdot 1 = 4703$$

denselben Wert wie der Term der Beispielzahl oben. In Dezimalschreibweise könnte man diesen Term unter Verwendung **negativer Ziffern** ausdrücken: $5\overline{3}03$. Für die negative Ziffer -3 verwende ich[1] die für die Zahldarstellung praktischere Schreibweise $\overline{3}$. (Kommazahlen lassen sich zwanglos in dieses Schema einordnen; Man darf allerdings den Querstrich einer negativen Ziffer nicht mit dem für einen periodischen Dezimalbruch verwechseln.)

Mit Zahlen, die negative Ziffern enthalten, kann man die meisten schriftlichen Rechenoperationen fast wie gewohnt ausführen, nur dass man gegebenenfalls subtrahieren statt addieren muss. Daraus ergeben sich beim Rechnen einige Vereinfachungen, die in Abschnitten zu den jeweiligen Rechenarten beschrieben werden. Andererseits ist mit negativen Ziffern die Darstellung einer Zahl nicht mehr eindeutig ($123 = 2\overline{7}\overline{7} = 2\overline{8}3 = 13\overline{7}$), wodurch ein Größenvergleich von Zahlen erschwert wird; es ist z.B. $2 > 1\overline{9}$, da $1\overline{9} = 1$.

Daher ist es vernünftig, Zahlen mit negativen Ziffern nur als Rechenhilfe zu verwenden, nicht aber zur Darstellung von Zahlengrößen.

Negative Ziffern und ihre Anwendung werden z.B. in [Blogannath] (Kapitel 'Vinculums') beschrieben.

Umwandlung positiver und negativer Ziffern

Negative Ziffern sollen als Rechenhilfsmittel dienen. Daher ist es wichtig, dass man negative und positive Ziffern in Zahlen ohne großen Rechen- und Denkaufwand ineinander umwandeln kann.

Unser Hauptwerkzeug dazu ist das **Zehnerkomplement** (ZK) einer Ziffer d, worunter einfach $\mathrm{ZK(d)} = 10 - \mathrm{d}$ zu verstehen ist.[2] Dazu kommen noch Überträge von ± 1 auf nachfolgende höhere Stellen.

Die Zahlen sind in diesem Kapitel zur besseren Erläuterung der Umwandlungsoperationen in Tabellenform dargestellt. In der Praxis würde man eine weniger aufwendige Gleichungsschreibweise $3\overline{7}2\overline{1} = 2319$ benutzen bzw. in einem schriftlichen Rechenschema die umgewandelten Zahlen einfach übereinander schreiben: $\begin{array}{cccc} 3 & \overline{7} & 2 & \overline{1} \\ 2 & 3 & 1 & 9 \end{array}$

Auch ist keinesfalls daran gedacht, in der Praxis die Umwandlungsoperationen explizit aufzuschreiben; dies dient an dieser Stelle nur zu deren Erläuterung.

[1] Das ist, glaube ich, kein 'offizielles' mathematisches Symbol.

[2] $\mathrm{ZK}(0) = 10$, d.h. 0 mit einem Übertrag von 1 auf die nächsthöhere Stelle

Positive → negative Ziffer

Um eine positive Ziffer in eine negative umzuwandeln, ersetzt man die positive Ziffer d durch das negative Zehnerkomplement $\overline{10-d}$. Zum Ausgleich kommt ein Übertrag von $+1$ auf die nächsthöhere Stelle hinzu. $(-(10-d)+10=d)$
Nullen werden nicht umgewandelt.

$$\begin{array}{ccc} 5 & 6 & 2 \\ \hline & \text{6+ü1} & -\text{ZK(2)} \\ 5 & 7 & \overline{8} \end{array}$$

Der Übertrag kann sich gegebenenfalls auch auf nachfolgende höhere Stellen auswirken: Ist die nächsthöhere Ziffer eine 9, wird diese zu 0 und der Übertrag wird an die übernächste Stelle weitergegeben.

$$\begin{array}{ccc} 5 & 9 & 2 \\ \hline \text{5+ü1} & \to 0 & -\text{ZK(2)} \\ 6 & 0 & \overline{8} \end{array}$$

Wenn man die Ziffer an der höchstwertigen Stelle umwandelt, muss man wegen des Übertrags die Zahl links um eine Stelle 1 ergänzen.

$$\begin{array}{cccc} & 8 & 4 & 1 \\ \hline \text{ü1} & -\text{ZK(8)} & & \\ 1 & \overline{2} & 4 & 1 \end{array}$$

Negative → positive Ziffer

Um eine negative Ziffer in eine positive umzuwandeln, ersetzt man die negative Ziffer $\overline{d}$ durch das positive Zehnerkomplement $10-d$. Zum Ausgleich kommt ein Übertrag von -1 auf die nächsthöhere Stelle hinzu. $((10-d)+(-10)=-d=\overline{d})$

$$\begin{array}{ccc} 5 & \overline{6} & 2 \\ \hline \text{5−ü1} & \text{ZK(6)} & \\ 4 & 4 & 2 \end{array}$$

Der Übertrag kann sich gegebenenfalls auch auf nachfolgende höhere Stellen auswirken: Ist die nächsthöhere Ziffer eine 0, wird diese zu 9 und der negative Übertrag wird an die übernächste Stelle weitergegeben.

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 5 & 0 & \overline{6} & 2 \\ \hline & \text{5−ü1} & \to 9 & \text{ZK(6)} & \\ 2 & 4 & 9 & 4 & 2 \end{array}$$

Falls dabei mehrere Nullen aufeinanderfolgen, werden alle zu 9. Der Übertrag wird auf die erste nachfolgende Ziffer angewandt, die $\neq 0$ ist.

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 0 & 0 & \overline{6} & 2 \\ \hline \text{2−ü1} & \to 9 & \to 9 & \text{ZK(6)} & \\ 1 & 9 & 9 & 4 & 2 \end{array}$$

Alternativ kann man den Übertrag -1 auch direkt auf die 0 anwenden und sie durch $\overline{1}$ ersetzen. Nachfolgende Stellen sind dann nicht betroffen.

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 5 & 0 & \overline{6} & 2 \\ \hline & & \text{0−ü1} & \text{ZK(6)} & \\ 2 & 5 & \overline{1} & 4 & 2 \end{array}$$

Der negative Übertrag lässt sich zwanglos auch auf negative Ziffern anwenden: Folgen zwei negative Ziffern aufeinander, wird die höherwertige Stelle einfach um 1 vermindert.

$$\begin{array}{cccc} 9 & \overline{7} & \overline{4} & 1 \\ \hline & \text{-7−ü1} & \text{ZK(4)} & \\ 9 & \overline{8} & 6 & 1 \end{array}$$

Muss $\overline{9}$ um 1 vermindert werden, setzt man 0 ein und wendet den Übertrag auf die übernächste Stelle an.

$$\begin{array}{cccc} 3 & \overline{9} & \overline{2} & 7 \\ \hline \text{3−ü1} & \to 0 & \text{ZK(2)} & \\ 2 & 0 & 8 & 7 \end{array}$$

Genau betrachtet gehorchen negative Überträge genau derselben Logik wie positive. Weil sie aber nicht so vertraut sind wie positive Überträge, werden sie hier ausführlicher dargestellt.

Umwandlung in eine Standardzahl

Der häufigste Fall wird die Umwandlung einer Zahl mit negativen Ziffern (z.B. im Ergebnis einer schriftlichen Rechnung) in eine Standardzahl mit ausschließlich positiven Ziffern sein.

Dazu wendet man einfach die Umwandlungsoperationen negativ $\rightarrow$ positiv auf alle negativen Ziffern an, wobei man die Zahl von rechts nach links abarbeitet ($\longleftarrow$).

Bei zwei oder mehr aufeinanderfolgenden negativen Ziffern ist es gleichgültig, ob man den Übertrag -1 vor...

$$\begin{array}{ccccc} 4 & 9 & \overline{2} & \overline{3} & 1 \\ \hline & \text{9 − ü1} & \text{ZK(2-ü1)} & \text{ZK(3)} & \\ 4 & 8 & 7 & 7 & 1 \\ & & & \longleftarrow & \end{array}$$

...oder nach der Zehnerkomplement-Bildung anwendet.

$$\begin{array}{ccccc} 4 & 9 & \overline{2} & \overline{3} & 1 \\ \hline & \text{9 − ü1} & \text{ZK(2)-ü1} & \text{ZK(3)} & \\ 4 & 8 & 7 & 7 & 1 \end{array}$$

Diese Umwandlung sollte man so lange üben bis man sie automatisch beherrscht.

Im Anschluss an den Abschnitt über negative Zahlen wird noch eine alternative Umwandlungsmethode[3] beschrieben.

Alle Ziffern > 5 umwandeln

Umgekehrt kann es auch notwendig sein, positive Ziffern in negative umzuwandeln, wenn man Zahlen mit Ziffern darstellen will, die möglichst kleine Beträge haben. Das bringt z.B. Vorteile bei der schriftlichen Multiplikation, da dann nur noch Produkte von kleinen Zahlen berechnet werden müssen.

Wieder arbeitet man die Zahl von rechts nach links ab und wandelt alle Ziffern, deren Betrag größer als 5 ist, in die zugehörigen negativen Ziffern um. Als Zehnerkomplemente der ursprünglichen Ziffern sind ihre Beträge nun kleiner als 5.
Eine Ziffer 5 kann durch einen Übertrag zu 6 werden und muss dann ebenfalls umgewandelt werden.

$$\begin{array}{ccccccc} 3 & 9 & 5 & 8 & 2 & 1 & 6 \\ \hline \text{3+ü1} & \rightarrow 0 & \text{-ZK(5+ü1)} & \text{-ZK(8)} & & \text{1+ü1} & \text{-ZK(6)} \\ 4 & 0 & \overline{4} & \overline{2} & 2 & 2 & \overline{4} \\ & & & & & \longleftarrow & \end{array}$$

Auch Zahlen, die bereits negative Ziffern enthalten, kann man auf diese Weise vereinfachen.
Eine 0, die durch einen Übertrag -1 vermindert wird, setzt man zu $\overline{1}$.
Ist die höchstwertige Ziffer größer als 5, wandelt man sie um und ergänzt die Zahl links um eine zusätzliche 1. (Wenn man die Stellenzahl nicht vergrößern möchte, kann man sie auch unumgewandelt stehen lassen.)

$$\begin{array}{ccccccc} & 6 & \overline{2} & 9 & 1 & 0 & \overline{7} \\ \hline \text{0+ü1} & \text{-ZK(6)} & \text{-2+ü1} & \text{-ZK(9)} & & \text{0−ü1} & \text{ZK(7)} \\ 1 & \overline{4} & \overline{1} & \overline{1} & 1 & \overline{1} & 3 \\ (& 6 & \overline{1} & \overline{1} & 1 & \overline{1} & 3) \end{array}$$

[3]Es ist nicht unbedingt empfehlenswert, zu viele Umwandlungsmethoden gleichzeitig zu verwenden. Um Fehler zu vermeiden sollte man sich besser eine Methode auswählen und sie verinnerlichen.

Darstellung und Umwandlung negativer Zahlen

Eine negative *Zahl* lässt sich auf zwei Arten darstellen:

Einmal ganz konventionell durch ein negatives Vorzeichen, unabhängig davon ob die Zahl nur positive oder auch negative Ziffern enthält ($-235 = -3\overline{7}5 \ldots$). Lediglich die höchstwertige Ziffer sollte dabei positiv sein.

Andererseits ist eine Zahl ganz ohne Vorzeichen negativ, wenn mindestens ihre höchstwertige Stelle eine negative Ziffer enthält. ($\overline{3}66 = \overline{246} = \overline{3}7\overline{4} = \overline{234} = -234$)

Am einfachsten und sichersten wandelt man beide Darstellungen – mit Vorzeichen und ohne Vorzeichen – ineinander um, indem man einfach bei jeder *Ziffer* das Vorzeichen umdreht. ($-123 = \overline{123}$, $-1\overline{7}4 = \overline{1}7\overline{4}$, $-\overline{8}2\overline{7} = 82\overline{7}$, $-\overline{253} = 253$). Auf die gleiche Weise erhält man zu einer gegebenen Zahl die Gegenzahl in vorzeichenfreier Schreibweise. In schriftlichen Rechnungen reicht diese Umwandlungen aus.

Die oben beschriebenen Regeln zur Umwandlung von Einzelziffern bleiben dabei gültig. Eine negative Zahl wie $\overline{3}4\overline{7}1$ ist ja eigentlich nur eine Abkürzung für den Term $-3000 + 4\overline{7}1$, in dem die positive Zahl $4\overline{7}1$ noch beliebig umgeformt werden kann.

Neben den Regeln oben kann man aber auch noch eine weitere Methode zur Umwandlung der Gesamtzahl verwenden. In der Vedischen Mathematik ist ein derartiges Rechenschema als *Nikhilam* bekannt:

In der einfachsten Darstellung einer negativen Zahl ohne Vorzeichen ist *nur* die höchstwertige Ziffer negativ. Die **Umwandlung** in diese Darstellung ist einfach:

Die höchste Ziffer h wird durch die negative Ziffer $\overline{h+1}$ ersetzt.
Alle weiteren Ziffern w bis auf die letzte werden durch ihr positives **Neuner**komplement $\mathrm{NK}(w) = 9 - w$ ersetzt.
Die letzte Ziffer wird durch ihr Zehnerkomplement ersetzt.

$$\begin{array}{rccccc}
- & 7 & 1 & 0 & 8 & 4 \\ \hline
 & \overline{7+1} & \mathrm{NK}(1) & \mathrm{NK}(0) & \mathrm{NK}(8) & \mathrm{ZK}(4) \\
 & \overline{8} & 8 & 9 & 1 & 6
\end{array}$$

Eine führende 9 wird zu 0 aber mit einem Übertrag von $\overline{1}$ auf die nächsthöhere Stelle.

$$\begin{array}{rccccc}
- & 9 & 5 & 3 & 9 & 4 \\ \hline
\text{ü}\overline{1} & \to 0 & \mathrm{NK}(5) & \mathrm{NK}(3) & \mathrm{NK}(9) & \mathrm{ZK}(4) \\
\overline{1} & 0 & 4 & 6 & 0 & 6
\end{array}$$

Im Unterschied zu Nullen innerhalb der Zahl lässt man anhängende Nullen effektiv einfach stehen und beginnt die Umwandlung mit der Zehnerkomplement-Bildung bei der ersten Stelle, die $\neq 0$ ist.

$$\begin{array}{rccccc}
- & 3 & 5 & 1 & 4 & 0 \\ \hline
 & \overline{3+1} & \mathrm{NK}(5) & \mathrm{NK}(1) & \mathrm{ZK}(4) & 0 \\
 & \overline{4} & 4 & 8 & 6 & 0
\end{array}$$

Nur, wenn außer der höchstwertigen *alle* Ziffern Null sind, funktioniert das Schema etwas anders; dann ist einfach $-d0\ldots0 = \overline{d}0\ldots0$, also z.B. $-70 = \overline{7}0$ oder $-2000 = \overline{2}000$.

$$\begin{array}{rccccc}
- & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ \hline
 & \overline{3+1} & \mathrm{NK}(5) & \mathrm{ZK}(1) & 0 & 0 \\
 & \overline{4} & 4 & 9 & 0 & 0
\end{array}$$

Die **Rückumwandlung** in eine Standardzahl mit negativem Vorzeichen funktioniert genauso, nur dass man für die negative Ziffer $\overline{d}$ die positive Ziffer $d-1$ einsetzt.

$$\begin{array}{cccccc}
 & \overline{3} & 4 & 8 & 2 & 6 \\ \hline
 & 3-1 & \mathrm{NK}(4) & \mathrm{NK}(8) & \mathrm{NK}(2) & \mathrm{ZK}(6) \\
- & 2 & 5 & 1 & 7 & 4
\end{array}$$

Eine führende $\overline{1}$ wird dabei zu 0 und fällt weg. Anhängende Nullen werden wie oben behandelt.

$$\begin{array}{cccccc}
 & \overline{1} & 2 & 5 & 7 & 0 \\ \hline
 & \to 0 & \mathrm{NK}(2) & \mathrm{NK}(5) & \mathrm{ZK}(7) & 0 \\
- & & 7 & 4 & 3 & 0
\end{array}$$

Weitgehend das gleiche Rechenschema kann man anwenden, wenn die Zahl außer der höchstwertigen noch weitere negative Ziffern enthält:

Man teilt dazu die Zahl in Zifferngruppen ein, die aus einer führenden negativen Ziffer und ansonsten nur aus positiven Ziffern oder Nullen bestehen. Diese Gruppen wandelt man, jede für sich, nach den obigen Schema um.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \overline{4} & 1 & 7 & \overline{2} & 5 & 3 \\ \hline
 & 4-1 & \mathrm{NK}(1) & \mathrm{ZK}(7) & 2-1 & \mathrm{NK}(5) & \mathrm{ZK}(3) \\
- & 3 & 8 & 3 & 1 & 4 & 7
\end{array}$$

Anhängende Nullen bleiben dabei wie oben unumgewandelt, bei 'inneren' Nullen bildet man das Neunerkomplement.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \overline{4} & 0 & \overline{7} & 0 & 2 & \overline{3} \\ \hline
 & \to 4 & 0 & 7-1 & \mathrm{NK}(0) & \mathrm{ZK}(2) & \to 3 \\
- & 4 & 0 & 6 & 9 & 8 & 3
\end{array}$$

Eine negative Ziffer, die keinen oder einen negativen rechten Nachbarn hat, wird einfach in die entsprechende positive Ziffer umgewandelt.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \overline{4} & 1 & \overline{7} & \overline{2} & 2 & \overline{3} \\ \hline
 & 4-1 & \mathrm{ZK}(1) & \to 7 & 2-1 & \mathrm{ZK}(2) & \to 3 \\
- & 3 & 9 & 7 & 1 & 8 & 3
\end{array}$$

Noch einmal die positiven Zahlen

Auch positive Zahlen (bzw. negative Zahlen *mit* Vorzeichen) lassen sich mit der *Nikhilam*-Methode in Standardzahlen umwandeln. Allerdings vertauschen dann positive und negative Ziffer ihre Rollen:

Die Zifferngruppen bestehen aus einer führenden positiven Ziffer und ansonsten nur aus negativen Ziffern oder Nullen. Für die positive Ziffer d schreibt man $d-1$, die negativen Ziffern werden wie oben durch ihre positiven Neuner- bzw. Zehnerkomplemente ersetzt.

$$\begin{array}{ccccccc}
3 & 7 & \overline{4} & \overline{1} & \overline{2} & 5 & \overline{6} \\ \hline
3 & 7-1 & \mathrm{NK}(4) & \mathrm{NK}(1) & \mathrm{ZK}(2) & 5-1 & \mathrm{ZK}(6) \\
3 & 6 & 5 & 8 & 8 & 4 & 4
\end{array}$$

Anhängende Nullen bleiben dabei wie oben unumgewandelt, bei 'inneren' Nullen, die zwischen negativen Ziffern eingeschlossen sind, bildet man das Neunerkomplement.

$$\begin{array}{ccccccc}
2 & \overline{5} & 0 & \overline{4} & 0 & 7 & 1 \\ \hline
2-1 & \mathrm{NK}(5) & \mathrm{NK}(0) & \mathrm{ZK}(4) & 0 & 7 & 1 \\
1 & 4 & 9 & 6 & 0 & 7 & 1
\end{array}$$

Eine positive Ziffer, die keinen oder einen positiven rechten Nachbarn hat, wird einfach übernommen.