Quersumme, Tests und Teilbarkeitsregeln

Jeder kennt aus der Schule wohl die Regel, dass eine Zahl N durch 9 teilbar ist, wenn ihre Quersumme – die Summe aller Ziffern von N – durch 9 teilbar ist. Man kann die Quersumme allerdings auch noch für einige andere Tests gebrauchen und auch bei ihrer Berechnung, so einfach sie ist, einige Abkürzungen nehmen.

Quersumme

Unter der Quersumme einer Zahl N versteht man zunächst einmal die Summe aller ihrer Ziffern. So berechnet man die Quersumme von $N = 449560127$ durch

$$4 + 4 + 9 + 5 + 6 + 0 + 1 + 2 + 7 = 38.$$

Man führt dieses Aufsummieren iterativ fort, bis die Quersumme nur noch aus einer Ziffer besteht:

$$\to 3 + 8 = 11 \to 1 + 1 = 2.$$

Dafür schreiben wir hier[1] als Symbol ein Paar spitzer Klammern, also

$$\langle 449560127 \rangle = 2.$$

Die Berechnung der Quersumme kann man wie folgt vereinfachen:

1) Alle Ziffern 9 müssen nicht berücksichtigt werden; Alle Ziffern 0 natürlich auch nicht.

$$\langle 449560127 \rangle \to 4 + 4 + \cancel{9} + 5 + 6 + \cancel{0} + 1 + 2 + 7$$

Insbesondere setzt man $\langle 9 \rangle = 0$.

2) Alle Ziffern, deren Summe 9 ergibt, brauchen ebenfalls nicht berücksichtigt werden. Man muss sich allerdings genau merken, welche Ziffern man weggelassen hat und welche nicht. Wenn man sie nicht mit dem Bleistift ausstreichen kann, sollte man vielleicht nur halbwegs benachbarte Neunersummen fortlassen.

$$\to 4 + \cancel{4} + \cancel{5} + 6 + 1 + \cancel{2} + \cancel{7}$$

3) Sobald die Zwischensumme > 9 ist, kann man, wenn man will, sofort 9 von der Zwischensumme abziehen, bzw. sofort die Quersumme der zweistellige Zwischensumme bilden.

$$\begin{aligned} &\to \underbrace{4 + 6}_{} + 1 \qquad && \scriptstyle 4+6=10 \to 10-9=1 \quad \text{bzw.} \quad 4+6=10 \to 1+0=1 \\ &\to \quad 1 \quad + 1 = 2 && \end{aligned}$$

Ich finde es am einfachsten, wenn ich mir im Kopf nicht die Ziffern und Rechenoperationen, sondern nur die Zwischenergebnisse der Quersummen-Bildung 'vorsage':

$$\langle 358914506 \rangle \to 3 \to 8 \to 16 \to 7 \xrightarrow{\cancel{9}} 8 \xrightarrow{\cancel{4}\cancel{5}\cancel{0}} 14 \to 5$$

[1] Ich glaube, es gibt kein 'offizielles' Symbol.

Quersummen-Tests

Bei der Additions- , Subtraktions- und Multiplikationsaufgaben kann man mit Hilfe der Quersumme ziemlich sicher überprüfen, ob man einen Rechenfehler gemacht hat. Grundlage für diese Tests sind die folgenden Sätze:

$a + b = c \quad \Rightarrow \quad \langle\langle a\rangle + \langle b\rangle\rangle = \langle c\rangle$

$a - b = c \quad \Rightarrow \quad \langle\langle a\rangle - \langle b\rangle\rangle = \langle c\rangle$ bzw. $a - b = c \quad \Rightarrow \quad \langle\langle c\rangle + \langle b\rangle\rangle = \langle a\rangle$

$a \cdot b = c \quad \Rightarrow \quad \langle\langle a\rangle \cdot \langle b\rangle\rangle = \langle c\rangle$

Bei nicht-periodischen und ungerundeten Quotienten q gilt auch bei Divisionsaufgaben:

$a : b = q \quad \Rightarrow \quad \langle\langle q\rangle \cdot \langle b\rangle\rangle = \langle a\rangle$

Die Tests funktionieren folgendermaßen: Wenn die 'Quersumme der Rechnung' und die Quersumme des Ergebnisses *nicht* übereinstimmen, hat man sich verrechnet (entweder bei der Aufgabe oder bei der Quersumme) und muss die Aufgabe überprüfen.

Additionen und **Multiplikationen** lassen sich ohne Weiteres überprüfen:

Richtiges Ergebnis:	37158	+	64517		=	101675
	$\langle\langle 37158\rangle$	+	$\langle 64517\rangle\rangle$	$= \langle 6+5\rangle = 2$	=	$\langle 101675\rangle$
Rechenfehler:	37158	+	64517	=		101575
	$\langle\langle 37158\rangle$	+	$\langle 64517\rangle\rangle$	$2 \neq 1 =$		$\langle 101575\rangle$
Richtiges Ergebnis:	491	$\cdot$	7482		=	3673662
	$\langle\langle 491\rangle$	$\cdot$	$\langle 7482\rangle\rangle$	$= \langle 5\cdot 3\rangle = \langle 15\rangle = 6$	=	$\langle 3673662\rangle$
Rechenfehler:	491	$\cdot$	7482	=		4173662
	$\langle\langle 491\rangle$	$\cdot$	$\langle 7482\rangle\rangle$	$= 6 \neq 2 =$		$\langle 4173662\rangle$

Bei **Subtraktionen** kann auch die Quersumme einstelliger negativer Zahlen $-k$ auftreten, die man gemäß $\langle -k\rangle = 9 - k$ berechnet.

1234	$-$	888		=	346
$\langle\langle 1234\rangle$	$-$	$\langle 888\rangle\rangle$	$= \langle 1-6\rangle = \langle -5\rangle = 4$	=	$\langle 346\rangle$

Negative Quersummen vermeidet man, wenn man statt der Subtraktion $a - b = c$ die Addition $c + b = a$ betrachtet.

1234	$-$	888		=	346
$\langle\langle 346\rangle$	+	$\langle 888\rangle\rangle$	$= \langle 4+6\rangle = 1$	=	$\langle 1234\rangle$

Dezimalbrüche stellen kein Problem dar, solange man sie nicht rundet oder abbricht.

0.32	$\cdot$	4.861		=	1.55552
$\langle\langle 0.32\rangle$	$\cdot$	$\langle 4.861\rangle\rangle$	$= \langle 5\cdot 1\rangle = 5$	=	$\langle 1.55552\rangle$

Ein gerundeter (bzw. abgeschnittener) Dezimalbruch führt in der Regel zu einer 'Fehlermeldung' beim Quersummen-Test.

0.32	$\cdot$	4.861		$\approx$	1.56
$\langle\langle 0.32\rangle$	$\cdot$	$\langle 4.861\rangle\rangle$	$= \langle 5\cdot 1\rangle = 5$	$\neq 3 =$	$\langle 1.56\rangle$

Auch **Divisionen** lassen sich mit dem Quersummen-Test überprüfen, wenn man den Quotienten q vollständig hinschreiben kann. Dabei testet man statt der Division $a : b = q$ die Multiplikation $q \cdot b = a$. (Im Beispiel ließe sich $\langle\langle 17\rangle : \langle 16\rangle\rangle = \langle 8 : 7\rangle = \langle 1.\overline{142857}\rangle$ nicht berechnen, während der Produktausdruck ohne Probleme berechenbar ist.)

$$\begin{array}{ccccc} 17 & : & 16 & & = & 1.0625 \\ \langle\langle 1.0625\rangle & \cdot & \langle 16\rangle\rangle & = \langle 5 \cdot 7\rangle = \langle 35\rangle = 8 & = & \langle 17\rangle \end{array}$$

Wenn der Quersummen-Test 'Alarm gibt', dann hat man sich verrechnet. Anders herum bedeutet eine Übereinstimmung der Quersummen aber nicht notwendigerweise, dass das Ergebnis richtig ist!

Der Quersummen-Test kann nicht jeden Fehler ausschließen: Vergessene oder überzählige Nullen, falsch gesetzte Kommas und Zahlendreher werden natürlich nicht erfasst. Auch wenn man sich bei mehreren Stellen so verrechnet, dass die sich Ziffernsumme um 0 bzw. $\pm 9k \quad (k \in \mathbb{N})$ unterscheidet, gibt es keinen Alarm.

$$\begin{array}{cccccc} 491 & \cdot & 7482 & & = & 3673662 \\ \langle\langle 491\rangle & \cdot & \langle 7482\rangle\rangle & = 6 & = & \langle 3673662\rangle \end{array}$$

Für die folgenden falschen Ergebnisse erhält man aber genauso die Quersumme 6:

$$\langle 3673662\rangle = 6 = \langle 36703662\rangle = \langle 367366{,}2\rangle = \langle 3673626\rangle = \langle 3664662\rangle = \langle 7678662\rangle.$$

Ich schätze, dass man mit dem Quersummen-Test etwa 90% der Rechenfehler bemerkt, die in der Praxis vorkommen.[2]

[2] Wegen der Fehler, bei denen sich die Ziffernsumme um Vielfache von 9 unterscheidet, wird oft geschrieben, dass mit dem Quersummen-Test nur $\frac{8}{9}$ der Fehler bemerkt werden. Ich denke jedoch, dass man sich weit häufiger um 1 oder 2 verrechnet als um ein Vielfaches von 9, und dass der Test daher in der Praxis etwas genauer ist.

Teilbarkeitsregeln

Die Quersumme spielt auch bei einigen Regeln eine Rolle, mit denen man überprüfen kann, ob eine ganze Zahl N durch einen gegebenen ganzen Divisor ohne Rest teilbar ist. Ich konzentriere mich hier auf die (nicht zahlreichen) praktikablen Teilbarkeitsregeln, die schnell und mühelos anwendbar sind. Die weniger praktikablen, bei denen man mit dem gleichen Aufwand eigentlich auch die betreffende Division ausführen könnte, lasse ich außen vor.

Zur einfacheren Darstellung der Regeln benutzen wir folgende Schreibweise:
Sei n_0 die Einerziffer von N ($10^0 = 1$), n_1 die Zehnerziffer ($10^1 = 10$), n_2 die Hunderterziffer ($10^2 = 100$) u.s.w.
Mit der Schreibweise $\underline{n_1 n_0}$ meinen wir eine zweistellige Zahl, deren Ziffern n_1 und n_0 sind. Bei z.B. $N = 57$ ist $n_1 = 5$ und $n_0 = 7$.

Eine Zahl N ist teilbar durch ...

2, wenn $n_0 = 0, 2, 4, 6$ oder 8 ist.

3, wenn $\langle N \rangle = 0, 3$ oder 6 ist.

4, wenn $\underline{n_1 n_0}$ durch 4 teilbar ist.

Das ist der Fall, wenn $2 \cdot n_1 + 1 \cdot n_0$ durch 4 teilbar ist.

5, wenn $n_0 = 0$ oder 5 ist.

6, wenn N durch 2 und durch 3 teilbar ist.

8, wenn $\underline{n_2 n_1 n_0}$ durch 8 teilbar ist.

Das ist der Fall, wenn $4 \cdot n_2 + 2 \cdot n_1 + 1 \cdot n_0$ durch 8 teilbar ist.

9, wenn $\langle N \rangle = 0$ ist.

$\mathbf{10^k}$**,** wenn $n_{k-1} = \ldots = n_0 = 0$ ist. ($k \in \mathbb{N}$)

11, wenn die Quersumme der 'geraden Stellen' $n_0+n_2+n_4+\ldots$ minus die Quersumme der 'ungeraden Stellen' $n_1 + n_3 + n_5 + \ldots$ durch 11 teilbar ist.