## Quadratwurzeln exakt berechnen

Es gibt tatsächlich ein ziemlich einfaches Rechenverfahren, mit dem man Quadratwurzeln Stelle für Stelle exakt berechnen kann. Es ähnelt etwas der schriftlichen Division.

Berechnen wir als Beispiel  $\sqrt{53784.1}$  :

## Verfahren

Dazu teilt man den Radikanden links und rechts vom Komma ausgehend in Gruppen von zwei Stellen ein. Ist die Zahl der Stellen links oder rechts ungerade, kann man vorne oder hinten eine Null ergänzen (05|37|84.|10|). Die Trennstriche muss man nicht unbedingt schreiben.

Anfangsschritt) Als erstes sucht man die größte Quadratzahl, die gerade noch kleiner oder gleich der ersten Zweiergruppe des Radikanden ist (hier 4 < 05). Deren Wurzel ist die erste Stelle des bisher berechneten Ergebnisses W; man schreibt sie über der ersten Zweiergruppe über das Wurzelzeichen. Ähnlich wie beim Dividieren schreibt man die Quadratzahl unter die erste Zweiergruppe, subtrahiert sie davon und erhält einen Rest R (hier R = 1).

$$\sqrt{\begin{array}{c|ccccc}
2 \\
0 & 5 & 3 & 7 & 8 & 4, & 1 & 0
\end{array}}$$

Von hier ab werden die folgenden Schritte Stelle für Stelle wiederholt.

Schritt 1) R bildet zusammen mit den nächsten beiden Stellen des Radikanden die Arbeitszahl A.

Man berechnet  $2 \cdot W$  – ohne Berücksichtigung eines eventuellen Dezimalkommas – und ergänzt das Ergebnis rechts um eine Ziffer b zwischen 0 und 9. Die neu entstandene Zahl H ergibt mit b multipliziert das Vergleichsprodukt V. (Im Beispiel könnte man also  $V = 40 \cdot 0$ ,  $V = 41 \cdot 1$ ,  $V = 42 \cdot 2$ , ... oder  $V = 49 \cdot 9$  erhalten.)<sup>1</sup>

$$4_{-}\times_{-}$$

b schreibt man nicht hin, sondern lässt zwei entsprechende Leerstellen. V notiert man eine Zeile unterhalb von A etwas nach links versetzt.

**Schritt 2)** Jetzt wird das größte b bestimmt, für das V gerade noch kleiner als A ist. (Im Beispiel ist b=3, da  $43\cdot 3=129<137$  aber  $44\cdot 4=176>137$  ist.) b ist dann gleichzeitig die nächste Stelle des Ergebnisses.

V wird von A subtrahiert und ergibt den neuen Rest R. Dann geht man wieder zu Schritt 1).

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Genau genommen ist  $V = (20 \cdot W + b) \cdot b$ .

So kann man jede weitere Stelle des Ergebnisses ausrechnen. Wenn alle Stellen des Radikanden abgearbeitet sind, hängt man ähnlich wie beim Dividieren *Paare* von Nullen an bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist. (Man muss sie aber unter der Wurzel nicht hinschreiben.)

Das Dezimalkomma des Radikanden wird an der entsprechenden Stelle des Ergebnisses eingefügt.

Damit ist  $\sqrt{53784.1} \approx 231.91...$ 

## Ergänzungen und Kommentare

- 1) Eine Komplikation dieses Verfahrens ist, dass die Werte A und H mit Fortschreiten der Rechnung immer länger werden. In den meisten Fällen reicht es aber aus, die zwei oder drei höchsten Stellen von H und A zu vergleichen um b zu bestimmen:
  - Wenn H auf jeden Fall größer ist als A, insbesondere also wenn die Stellenzahl größer ist, folgt sofort b=0. So ist H=100b für alle b größer als A=999
  - Wenn andererseits H genau zwei Stellen weniger<sup>2</sup> als A hat, kommt nur b=9 in Frage.
  - Wenn H und A die gleiche Stellenzahl haben, vergleicht man die beiden höchsten Stellen der beiden Zahlen. Wenn z.B. A = 64900 und H = 4638b ist, sieht man sofort, dass nur b = 1 möglich ist, da  $46 \cdot 2 = 92 > 64$ . Oft reicht sogar die Betrachtung der höchsten Stelle, hier z.B.  $4 \cdot 2 = 8 > 6$ . Hat H genau eine Stelle weniger als A, sollte man die beiden höchsten Stellen

von H mit den drei höchsten von A vergleichen.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Größere Abweichungen kommen nicht vor.

- ullet Wenn der Vergleich nicht ganz eindeutig ausfällt oder man unsicher ist, berechne man V in einer Nebenrechnung vollständig mit einem Schätzwert für b, den man dann gegebenenfalls noch korrigieren kann, ohne seinen Aufschrieb durcheinander zu bringen.
  - Wenn z.B. A = 42310 und H = 462b ist, könnte man beim Schätzwert b = 9 unsicher werden, da  $46 \cdot 9 = 414 \lesssim 423$  ein knappes Ergebnis ist. Schlimmer noch, wenn z.B. A = 44107 und H = 735b ist, scheint b = 6 die richtige Wahl zu sein, da  $73 \cdot 6 = 438 < 441$ . Eine genaue Rechnung liefert allerdings  $7356 \cdot 6 = 44136 > 44107$ , so dass man b = 5 wählen muss!
- Bei großen Werten von A und H zählt man die Stellen besser ab, da man mehr als etwa sechs Stellen nicht mehr gut mit einem Blick erfassen kann. Wie bei den "Divisionshilfen", kann man die zu vergleichenden höchstwertigen Stellen auch mit einem kleinen Strich abtrennen<sup>3</sup> (A = 423|10 und H = 46|2b)
- Die Bestimmung von b ist im Wesentlichen eine Division A/H.
- 2) Wenn ein Radikand eine ganzzahlige Wurzel hat, erhält man am Ende R = 0.

3) Zahlen mit vielen führenden oder anhängenden Nullen wandelt man am besten in Exponentialschreibweise um, und zwar so, dass der Exponent eine gerade Zahl ist:

$$\sqrt{0.000000000123} = \sqrt{1.23 \cdot 10^{-10}} = \sqrt{1.23} \cdot 10^{-5} 
\sqrt{4560000000} = \sqrt{45.6 \cdot 10^8} = \sqrt{45.6} \cdot 10^4 
\text{aber auch} 
\sqrt{7.89 \cdot 10^7} = \sqrt{78.9 \cdot 10^6} = \sqrt{78.9} \cdot 10^3$$

Die Wurzeln berechnet man dann mit der obigen Methode.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Entspricht der Blaufärbung in den Beispielen.