

Quadrat- und Kubikwurzeln näherungsweise berechnen

Um für Quadrat- und Kubikwurzeln schnell einen Näherungswert zu bestimmen, bedient man sich am bequemsten des sogenannten **Newton-Verfahrens**, aus dem eine Rechenformel abgeleitet wird, oder man **interpoliert** zwischen auswendig gelernten Werten, nämlich den Quadrat- bzw. Kubikzahlen. Ich ziehe das Newton-Verfahren vor, da es genauer aber nicht schwieriger ist und man weniger auswendig lernen muss.

Beide Methoden kann man schriftlich oder mit etwas Übung auch im Kopf ausführen. Vor allem fürs Kopfrechnen kann man sich jeweils auf die Anwendung der Grundformel beschränken und kompliziertere Brüche überschlagen, was immer noch eine gute bis sehr gute Genauigkeit liefert. Die unten beschriebenen (rechenaufwendigen) Korrekturen dienen dazu, den Näherungsfehler überall unter die angestrebte Grenze zu drücken.

Als Genauigkeit des Näherungswerts wird ein relativer Fehler $< 1\%$ angestrebt.

Vorüberlegungen

Man kann sich bei den Quadratwurzeln auf Radikanden im Bereich $1 \dots 100$ und bei den Kubikwurzeln auf Radikanden im Bereich $1 \dots 1000$ beschränken. Wurzeln von größeren oder kleineren Radikanden lassen sich mit Hilfe der Exponentialschreibweise auf jene zurückführen. So ist z.B. $\sqrt{2300} = \sqrt{23 \cdot 100} = \sqrt{23} \cdot 10$.

Für jedes Verfahren sollte man die **Quadratzahlen** von $1 \dots 20$ und die **Kubikzahlen** von $1 \dots 10$ auswendig können. (Bei den Quadratzahlen von $11 \dots 20$ kann man zur Not auch auf das Kapitel “Multiplikationstricks” zurückgreifen, wenn man das Auswendiglernen vermeiden will.)

Q	Q^2	Q	Q^2
1	1	11	121
2	4	12	144
3	9	13	169
4	16	14	196
5	25	15	225
6	36	16	256
7	49	17	289
8	64	18	324
9	81	19	361
10	100	20	400

K	K^3
1	1
2	8
3	27
4	64
5	125
6	216
7	343
8	512
9	729
10	1000

Newton-Verfahren

Die **Quadratwurzel** einer Zahl Z ist näherungsweise

$$\sqrt{Z} \approx Q + \frac{Z - Q^2}{2Q}$$

wobei Q^2 die Z nächstgelegene Quadratzahl ist und Q deren Wurzel.

$Z - Q^2$ ist der Abstand von Z bis zur Quadratzahl; er ist positiv, wenn Z größer ist als Q^2 , anderenfalls negativ. Entsprechend wird $|\frac{Z-Q^2}{2Q^2}|$ addiert bzw. subtrahiert.

Vor allem für kleinere Werte von Z ist teilweise der Fehler der Näherungsformeln größer als 1%. In diesen Fällen kann man mit erweiterten Radikanden ($10Z$ oder $100Z$) rechnen, deren Wurzeln dann wieder mit der jeweiligen Näherungsformel berechnet werden.

$Z = 13 \dots 400$	Näherungsformel
(... 450)	mit $Q = 20$
$Z = 1 \dots 4$	$\sqrt{Z} \approx \frac{1}{10} \sqrt{100 Z}$
$Z = 4 \dots 13$	$\sqrt{Z} \approx 0.316 \cdot \sqrt{10 Z}$
(... 40)	

Der relative Fehler (Abb. 1) ist so stets $< 1\%$, im Mittel sogar $< 0.1\%$.

Der absolute Fehler (Abb. 4) liegt im Mittel bei 0.005, kann aber auch auf Werte von 0.01 ... 0.03 steigen.

Die größten Fehler treten bei Z -Werten auf, die mittig zwischen den Quadratzahlen liegen. Hier kann man die Genauigkeit durch die Verwendung 'halbzahliger' Quadratzahlen (s. "Multiplikationstricks") verbessern:

$$Q = q, 5 \quad Q^2 = q(q + 1), 25$$

Man kann diese Technik insbesondere für $Z = 4 \dots 30$ benutzen um die (für die Kopfrechnung) unhandliche Multiplikation mit 0.316 zu vermeiden (Abb. 2 und Abb. 5).

Die **Kubikwurzel** einer Zahl Z ist näherungsweise

$$\sqrt[3]{Z} \approx K + \frac{Z - K^3}{3K^2}$$

wobei K^3 die Z nächstgelegene Kubikzahl ist und K deren dritte Wurzel.

$Z - K^3$ ist der Abstand von Z bis zur Kubikzahl; er ist positiv, wenn Z größer ist als K^3 , anderenfalls negativ. Entsprechend wird $|\frac{Z-K^3}{3K^2}|$ addiert bzw. subtrahiert.

$Z = 120 \dots 1000$	Näherungsformel
(... 1340)	mit $K = 10$
$Z = 1 \dots 13$	$\sqrt[3]{Z} \approx 0.215 \cdot \sqrt[3]{100 Z}$
$Z = 13 \dots 120^1$	$\sqrt[3]{Z} \approx 0.464 \cdot \sqrt[3]{10 Z}$
$Z = 163 \dots 170.5$	$K = 6$ statt $K = 5$

Der relative Fehler (Abb. 3) ist so stets $< 1\%$, im Mittel sogar $< 0.2\%$.

Der absolute Fehler (Abb. 6) liegt im Mittel bei 0.01, kann aber bis auf 0.05 steigen.

Halbzahlige Kubikzahlen sind ziemlich umständlich zu berechnen². Man kann aber etwas an Genauigkeit gewinnen, wenn man in der Näherungsformel die *größere* Kubikzahl nicht erst ab der Mitte M zwischen zwei Kubikzahlen K^3 und $(K+1)^3$, sondern schon bei $M - \frac{3}{2}K$ verwendet.

¹Nötig ist die Verwendung erweiterter Radikanden nur für $Z = 1 \dots 6, 10 \dots 20, 35 \dots 48$ und $84 \dots 95$. Ansonsten funktioniert auch die Näherungsformel direkt.

²Mit der nächstkleineren Kubikzahl(wurzel) \tilde{k} und $K = \tilde{k}, 5$ ist $K^3 = \tilde{k}^3 + \frac{3}{4}(2\tilde{k} + 1)\tilde{k} + \frac{1}{8}$.

Beispiele Quadratwurzeln

$\sqrt{86} \approx 9 + \frac{5}{2.9} \approx 9.278$	9.2736...
$\sqrt{60} \approx 8 - \frac{4}{2.8} = 8 - \frac{1}{4} \approx 7.750$	7.7459...
$\sqrt{2.1} = \frac{1}{10}\sqrt{210} \approx \frac{1}{10} \left(14 + \frac{14}{2.14}\right) \approx 1.450$	1.4491...
$\sqrt{7} \approx 3 - \frac{2}{2.3} \approx 2.667$	2.6457...
$\sqrt{7} \approx 0.316 \cdot \sqrt{70} \approx 0.316 \left(8 + \frac{6}{2.8}\right) = 0.316 \cdot 8.375 \approx 2.647$	2.6457...
$\sqrt{7} \approx 2.5 + \frac{0.75}{2.2.5} \approx 2.650$	2.6457...

Die auftretenden Brüche lassen sich oft kürzen und dann mit wenig Aufwand (Grundbrüche auswendig lernen) ziemlich genau dezimal berechnen.

Das Endergebnis ist meist auf zwei Stellen nach dem Komma genau, insbesondere bei durchgehender Verwendung der halbzahligen Quadratzahlen. Zwischenergebnisse sollte man auf drei Nachkommastellen ausrechnen.

Das Endergebnis und Zwischenergebnisse sollte man *abrunden*; *auf*runden nur wenn $\frac{Z-Q^2}{2Q}$ ein negatives Vorzeichen hat.

Beispiele Kubikwurzeln

$\sqrt[3]{317} \approx 7 - \frac{26}{3.7^2} \approx 7 - 0.177 \approx 6.823$	6.8184...
$\sqrt[3]{560} \approx 8 + \frac{48}{3.8^2} = 8 + \frac{1}{4} \approx 8.250$	8.2425...
$\sqrt[3]{3} = 0.215 \cdot \sqrt[3]{300} \approx 0.215 \left(7 - \frac{43}{3.7^2}\right) \approx 1.442$	1.4422...
$\sqrt[3]{42} \approx 3 + \frac{15}{3.3^2} \approx 3.556$	3.4760...
$\sqrt[3]{42} \approx 0.464 \cdot \sqrt[3]{420} \approx 0.464 \left(7 + \frac{77}{3.7^2}\right) \approx 0.464 \cdot 7.524 \approx 3.491$	3.4760...
$\sqrt[3]{42} \approx 4 - \frac{22}{3.4^2} \approx 3.542$	3.4760...

Der Rechenaufwand ist wegen der größeren Zahlen höher als bei der Berechnung von Quadratwurzeln. Es bietet sich hier vornehmlich eine schriftliche Berechnung an.

Das Endergebnis ist meist etwa auf zwei Stellen nach dem Komma genau. Zwischenergebnisse sollte man auf drei Nachkommastellen ausrechnen.

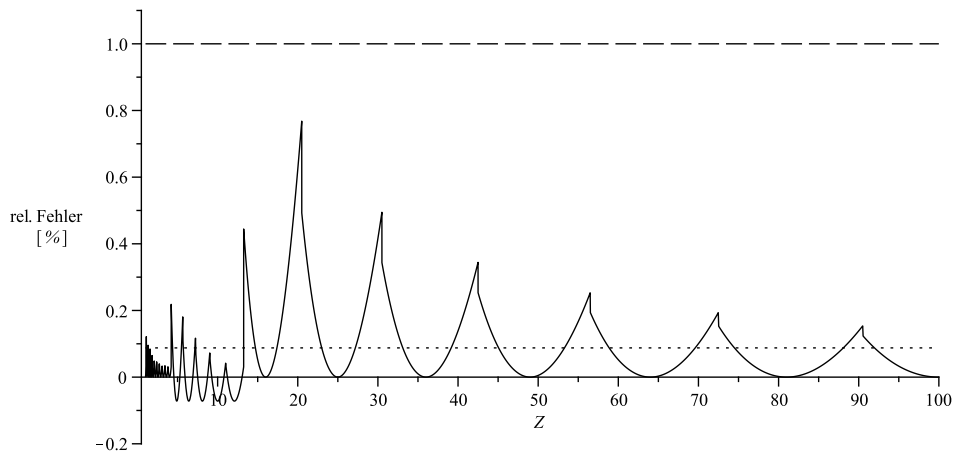


Abbildung 1: Relativer Fehler bei der Quadratwurzel-Berechnung mit erweiterten Radikanden für Z -Werte im Bereich $1 \dots 13$

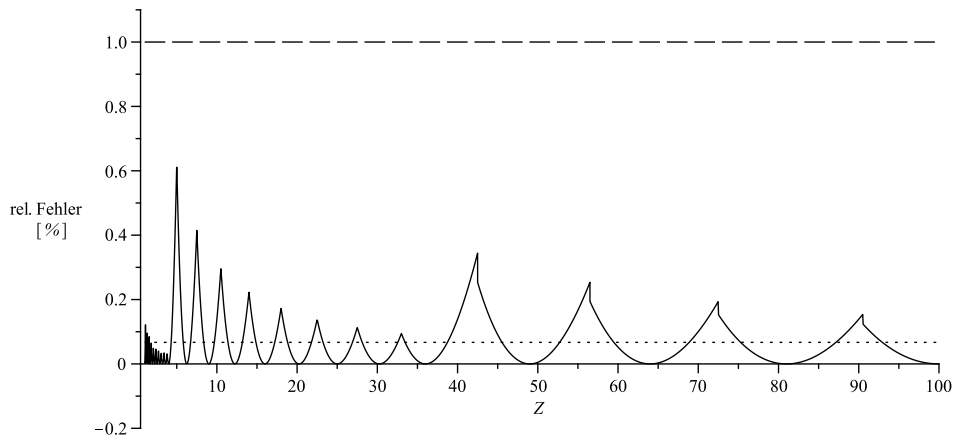


Abbildung 2: Relativer Fehler bei der Quadratwurzel-Berechnung mit erweiterten Radikanden für Z -Werte im Bereich $1 \dots 4$ und halbzahligen Quadratzahlen für Z -Werte im Bereich $4 \dots 30$.

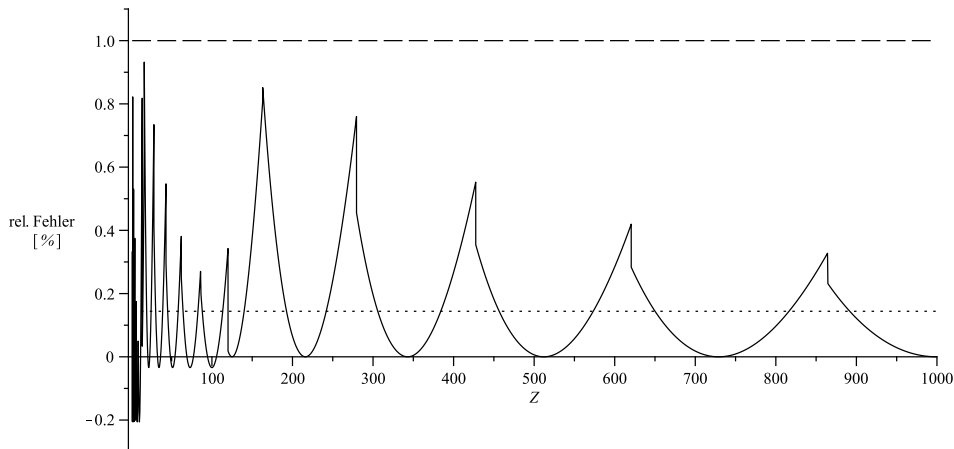


Abbildung 3: Relativer Fehler bei der Kubikwurzel-Berechnung mit erweiterten Radikanden für Z -Werte im Bereich $1 \dots 120$

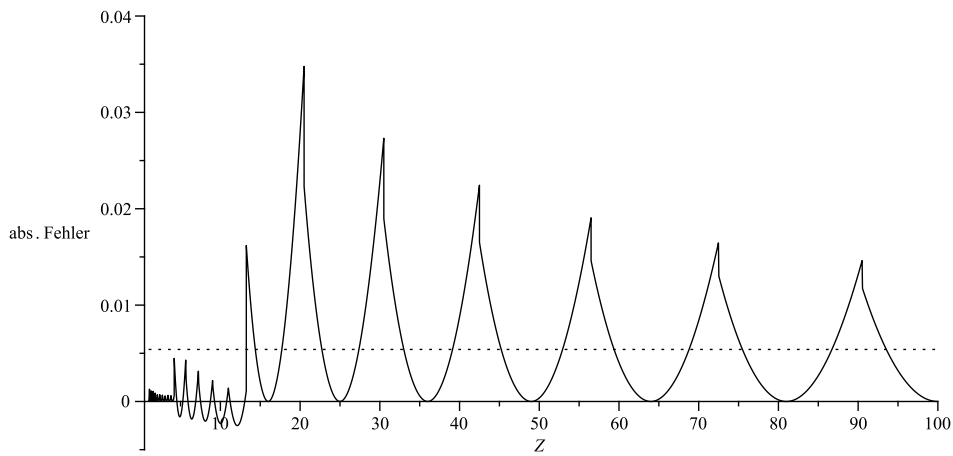


Abbildung 4: Absoluter Fehler bei der Quadratwurzel-Berechnung mit erweiterten Radikanden für Z -Werte im Bereich $1 \dots 13$

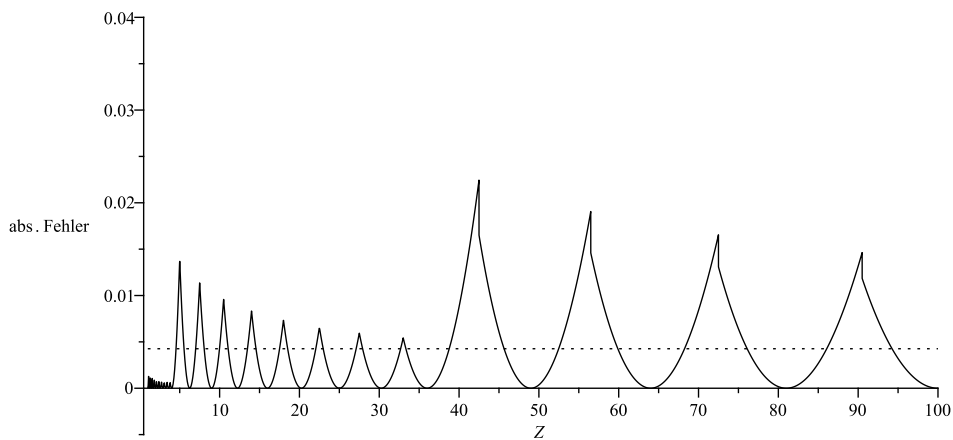


Abbildung 5: Absoluter Fehler bei der Quadratwurzel-Berechnung mit erweiterten Radikanden für Z -Werte im Bereich $1 \dots 4$ und halbzahligen Quadratzahlen für Z -Werte im Bereich $4 \dots 30$

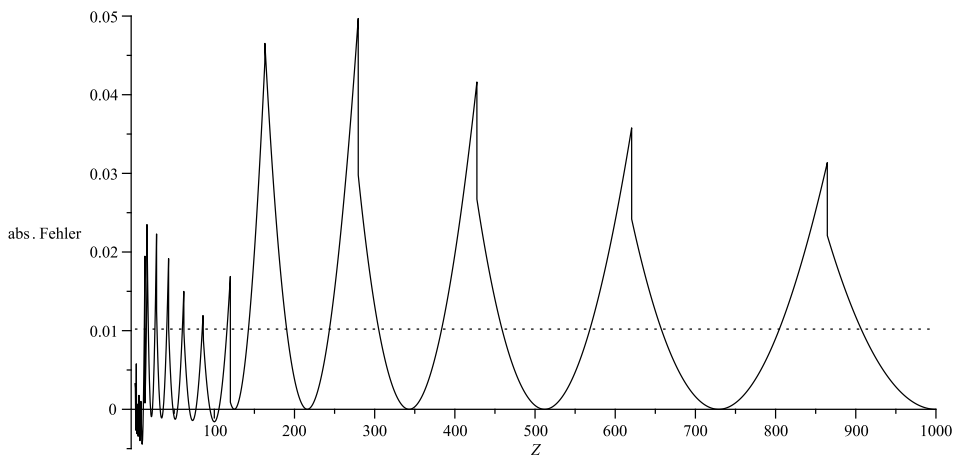


Abbildung 6: Absoluter Fehler bei der Kubikwurzel-Berechnung mit erweiterten Radikanden für Z -Werte im Bereich $1 \dots 120$

Verbesserte Genauigkeit

Man kann mit mehr Rechenaufwand die Genauigkeit der Ergebnisse erheblich steigern.

Von dem mit der Näherungsformel berechneten Wert kann man einen von Tschebyscheff gefundenen Korrekturterm subtrahieren.

Korrektur

$$-\frac{1}{2Q} \left(\frac{Z - Q^2}{2Q} \right)^2$$

wobei $\frac{Z-Q^2}{2Q}$ ja schon für die Näherungsformel berechnet wurde.

Korrektur

$$-\frac{1}{K} \left(\frac{Z - K^3}{3K^2} \right)^2$$

wobei $\frac{Z-K^3}{3K^2}$ ja schon für die Näherungsformel berechnet wurde.

Die Näherungsformeln – ohne oder mit der Tschebyscheff-Korrektur – lassen sich darüberhinaus **iterativ** verwenden, d.h. man kann das berechnete Ergebnis a_n als verbesserte Näherung erneut in dieselbe Formel einsetzen und eine genauere Näherung a_{n+1} bestimmen. Für die Grundformel erhält man

$$a_{n+1} = a_n + \frac{Z - a_n^2}{2a_n}$$

wobei $a_1 = Q$ ist.

$$a_{n+1} = a_n + \frac{Z - a_n^3}{3a_n^2}$$

wobei $a_1 = K$ ist.

Alternativ kann man die folgende äquivalente Iterationsformel verwenden, in der aber um 1 niedrigere Potenzen vorkommen.

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{Z}{a_n} \right)$$

wiederum mit $a_1 = Q$.

$$a_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2a_n + \frac{Z}{a_n^2} \right)$$

wiederum mit $a_1 = K$.

Bei jedem Iterationsschritt verdoppelt sich in etwa die Zahl der korrekten Stellen. (Mit der Tschebyscheff-Korrektur verdreifacht sie sich sogar.) Allerdings muss man dafür auch die Zwischenergebnisse entsprechend genau berechnen. Das bedeutet angesichts der Divisionen und Potenzen schon im zweiten Iterationsschritt einen großen Rechenaufwand, der nur noch schriftlich zu bewältigen ist.

Diese ziemlich genaue aber rechenaufwendige Formel von [Pour] führt die Kubik- auf eine Quadratwurzel zurück:

$$\sqrt[3]{Z} = \frac{K}{2} + \sqrt{\frac{4Z - K^3}{12K}}$$

K wählt man genau wie bei der Newtonschen Formel, insbesondere aber $K = 1$ für $Z = 1 \dots 3.3$. Relativer und absoluter Fehler sind < 0.01 , meist sogar deutlich kleiner als 0.001 . Nur um $Z = 3.3$ herum sind die Fehler geringfügig größer.

Interpolation

Wenn man annimmt, dass die Wurzelfunktion zwischen den Quadratzahlen bzw. Kubikzahlen einen näherungsweise linearen Verlauf hat, kann man für dazwischenliegende Werte von Z die Wurzeln wie folgt berechnen:

Sei $Z = q^2 + r$, wobei q^2 die zu Z *nächstkleinere* Quadratzahl ist. Dann ist

$$\sqrt{Z} \approx q + r \cdot I_q + 0.01$$

oder mit $Z = (q + 1)^2 - s$

$$\sqrt{Z} \approx (q + 1) - s \cdot I_q + 0.01,$$

wobei man die I_q aus folgender Tabelle abliest bzw. auswendig kennt:

q	I_q
1	$\frac{1}{3} \approx 0.33$
2	$\frac{1}{5} \approx 0.20$
3	$\frac{1}{7} \approx 0.14$
4	$\frac{1}{9} \approx 0.11$
5	$\frac{1}{11} \approx 0.09$
6	$\frac{1}{13} \approx 0.08$
7	$\frac{1}{15} \approx 0.07$
8	$\frac{1}{17} \approx 0.06$
9	$\frac{1}{19} \approx 0.05$

Der relative Fehler ist für $Z > 9$ deutlich kleiner als 1%. Die Korrektur

$$\begin{aligned} Z = 1 \dots 4 & \quad + (Z - 1) \cdot (4 - Z) \cdot 0.033 \\ & \quad = + (Z - 1) \cdot (4 - Z) : 30 \\ Z = 4 \dots 9 & \quad + (Z - 4) \cdot (9 - Z) \cdot 0.008 \\ & \quad = + (Z - 4) \cdot (9 - Z) : 125 \end{aligned}$$

bringt den Fehler überall auf Werte kleiner als 1%, im Mittel 0.15% (Abb. 7).

Der absolute Fehler ist meist kleiner als 0.01 (im Mittel 0.007), steigt aber für $Z < 33$ auch bis $(-)$ 0.03 (Abb. 7).

Die Verwendung der Dezimalbrüche führt zu etwas ungenaueren Ergebnissen: der relative Fehler ist dann immer noch kleiner als 1%, der absolute kleiner als 0.05 (Abb. 7).

Sei $Z = k^3 + r$, wobei k^3 die zu Z *nächstkleinere* Kubikzahl ist. Dann ist

$$\sqrt[3]{Z} \approx k + r \cdot I_k + 0.02,$$

oder mit $Z = (k + 1)^3 - s$

$$\sqrt[3]{Z} \approx (k + 1) - s \cdot I_k + 0.02,$$

wobei man die I_k aus folgender Tabelle³ abliest bzw. auswendig kennt:

k	I_k
1	$\frac{1}{7} \approx 0.140$
2	$\frac{1}{20} \approx 0.050$
3	$\frac{1}{36} \approx 0.028$
4	$\frac{1}{60} \approx 0.016$
5	$\frac{1}{90} \approx 0.011$
6	$\frac{1}{130} \approx 0.008$
7	$\frac{1}{170} \approx 0.006$
8	$\frac{1}{220} \approx 0.0045$
9	$\frac{1}{270} \approx 0.0037$

Der relative Fehler ist für $Z > 27$ fast immer deutlich kleiner als 1%. Die Korrektur

$$\begin{aligned} Z = 1 \dots 8 & \quad + (Z - 1) \cdot (8 - Z) : 80 \\ Z = 8 \dots 27 & \quad + (Z - 8) \cdot (27 - Z) : 800 \end{aligned}$$

bringt den relativen Fehler fast überall auf Werte unter 1%, im Mittel 0.2% (Abb. 8).

Der absolute Fehler ist kleiner als 0.04, im Mittel 0.012 (Abb. 8).

Die Verwendung der Dezimalbrüche führt zu etwas ungenaueren Ergebnissen: der relative Fehler ist dann immer noch weitestgehend kleiner als 1%, der absolute kleiner als 0.05 (Abb. 8).

³Die Interpolationsbrüche I_k sind nicht die mathematisch korrekten Werte, sondern wurden zum Zwecke leichterer Berechenbarkeit gerundet oder zur Erzielung möglichst kleiner Fehler modifiziert.

Beispiele Quadratwurzeln

$$\begin{aligned}\sqrt{57} &\approx 7 + \frac{8}{15} + 0.01 \approx 7.543 \\ &\approx 7 + 8 \cdot 0.07 + 0.01 = 7.570 && 7.5498 \dots \\ \sqrt{69} &\approx 8 + \frac{5}{17} + 0.01 \approx 8.304 \\ &\approx 8 + 5 \cdot 0.06 + 0.01 = 8.310 && 8.3066 \dots \\ \sqrt{2} &\approx 1 + \frac{1}{3} + 0.01 + \frac{1 \cdot 2}{30} \approx 1.343 + 0.067 \approx 1.410 \\ &\approx 1 + 1 \cdot 0.33 + 0.01 + 1 \cdot 2 \cdot 0.033 = 1.34 + 0.066 \\ &&& \approx 1.407 && 1.4142 \dots \\ \sqrt{7.5} &\approx 2 + \frac{3.5}{5} + 0.01 + \frac{3.5 \cdot 1.5}{125} = 2.710 + 0.042 \approx 2.752 \\ &\approx 2 + 3.5 \cdot 0.20 + 0.01 + 3.5 \cdot 1.5 \cdot 0.008 \\ &&& = 2.71 + 0.042 \approx 2.752 && 2.7386 \dots\end{aligned}$$

Die auftretenden Brüche lassen sich oft kürzen und dann mit wenig Aufwand (Grundbrüche auswendig lernen) ziemlich genau dezimal berechnen. Manchmal ist auch die direkte Berechnung mit Dezimalzahlen leichter. Für $Z < 9$ tragen die **Korrekturterme** oft erheblich zur Genauigkeitsverbesserung bei.

Das Endergebnis ist meist etwa auf zwei Stellen nach dem Komma genau.

Beispiele Kubikwurzeln

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{231} &\approx 6 + \frac{15}{130} + 0.02 \approx 6.135 \\ &\approx 6 + 15 \cdot 0.008 + 0.02 = 6.140 && 6.1357 \dots \\ \sqrt[3]{902} &\approx 9 + \frac{173}{270} + 0.02 \approx 9.661 \\ &\approx 9 + 173 \cdot 0.0035 + 0.02 \approx 9.626 && 9.6620 \dots \\ \sqrt[3]{20} &\approx 2 + \frac{12}{20} + 0.02 + \frac{12 \cdot 7}{800} = 2.62 + 0.105 \approx 2.725 \\ &\approx 2 + 12 \cdot 0.050 + 0.02 + \frac{12 \cdot 7}{800} = 2.62 + 0.105 \approx 2.725 && 2.7144 \dots \\ \sqrt[3]{5} &\approx 1 + \frac{4}{7} + 0.02 + \frac{4 \cdot 3}{80} \approx 1.59 + 0.15 \approx 1.741 \\ &\approx 1 + 4 \cdot 0.140 + 0.02 + \frac{4 \cdot 3}{80} = 1.58 + 0.15 \approx 1.730 && 1.7099 \dots\end{aligned}$$

Hier bietet sich wiederum vorwiegend eine schriftliche Berechnung an.

Das Endergebnis ist auf ein bis zwei Stellen nach dem Komma genau.

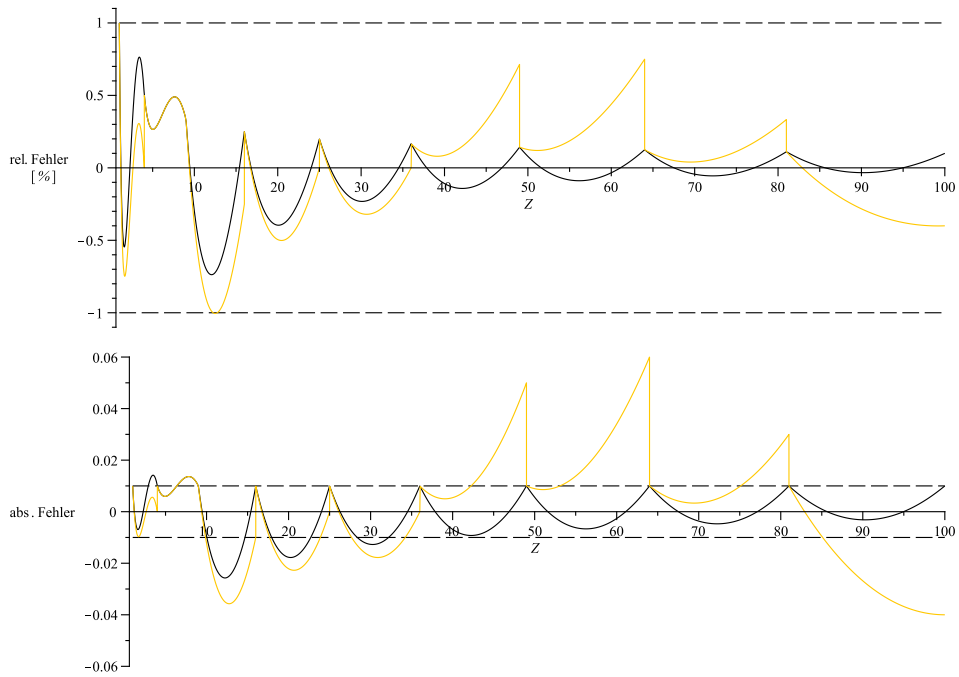


Abbildung 7: Relativer und absoluter Fehler bei Quadratwurzel-Interpolation mit Korrektur-Termen für Z -Werte im Bereich von $1 \dots 9$. Schwarz: mit Brüchen, Gelb: mit Dezimalfaktoren

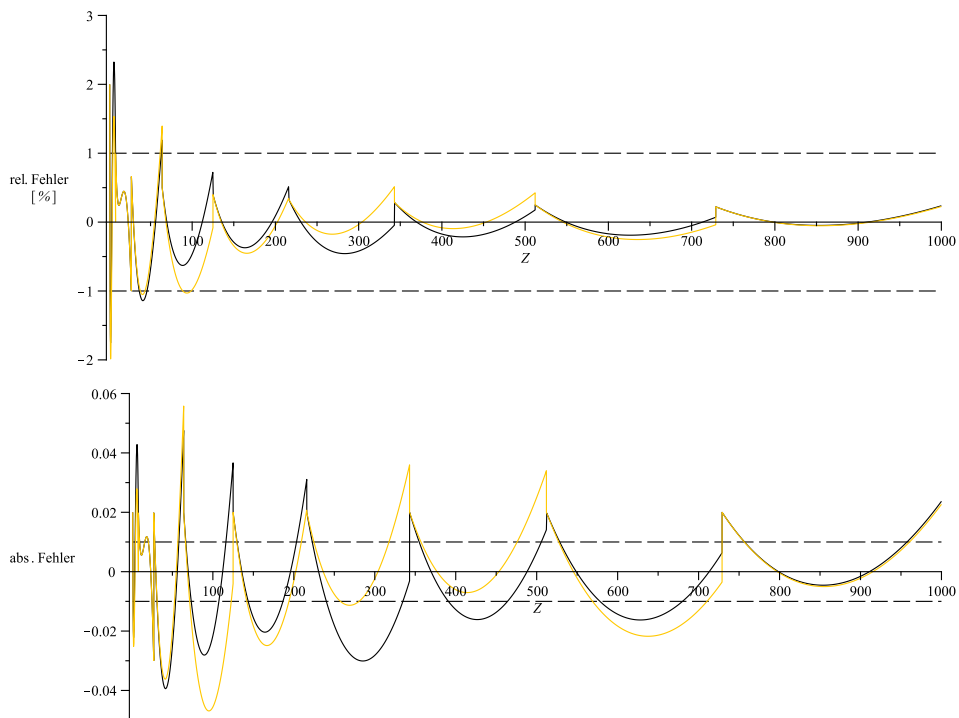


Abbildung 8: Relativer und absoluter Fehler bei Kubikwurzel-Interpolation mit Korrekturtermen für Z -Werte im Bereich $1 \dots 27$. Schwarz: mit Brüchen, Gelb: mit Dezimalfaktoren